



第一屆金融科技應用與創新校際競賽

AI@FinTech-2019

學生講座系列一

分配問題 (Allocation) 及
線性規劃 (Linear Programming)

29th June, 2019

© 2019 CUHK.
All Rights Reserved.

線性規劃

1) 欲望無限，但資源有限，因此有需要作出「最好」的決定來盡量滿足欲望。

2) Warm-up exercises

(L1) 小明上廣州、探親友、過新年。小明明天就回香港，他希望可在今天買到手信給香港的親戚好友，亦希望在廣州遊玩。買手信時，他希望購到大約為 100 元的手信，預計半小時定能買到一件稱心的手信。另一方面，遊玩的價錢大約為每小時 40 元，但他的媽媽只許他最多遊玩 3 小時。如果小明買到一件手信跟遊玩一小時同樣開心，他應該如何善用今天餘下的 4 小時，令自己最開心呢？假設小明有 400 元。

解： 變數：

設小明買 x 件手信，遊玩 y 小時。

限制：

(時間：) $0.5x + y \leq 4$ 或 $x + 2y \leq 8$

(金錢：) $100x + 40y \leq 400$ 或 $5x + 2y \leq 20$,

(其他：) $y \leq 3$,

(變數限制：) $x \geq 0, y \geq 0$

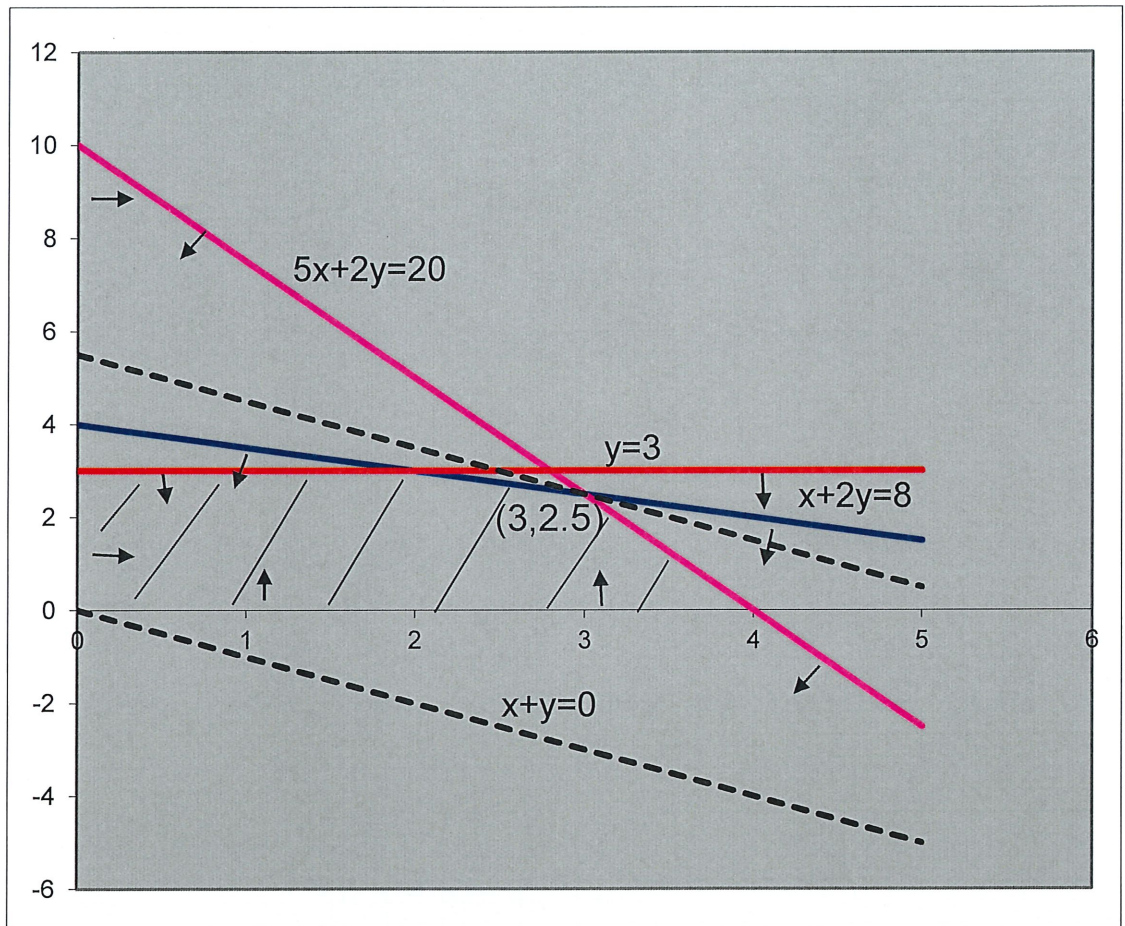
目標函數： $x + y$

目標：希望目標函數到達最大值。

模型：

$$\begin{array}{ll} \max & x + y \\ \text{s.t.} & x + 2y \leq 8 \\ & 5x + 2y \leq 20 \\ & y \leq 3 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

圖解法：



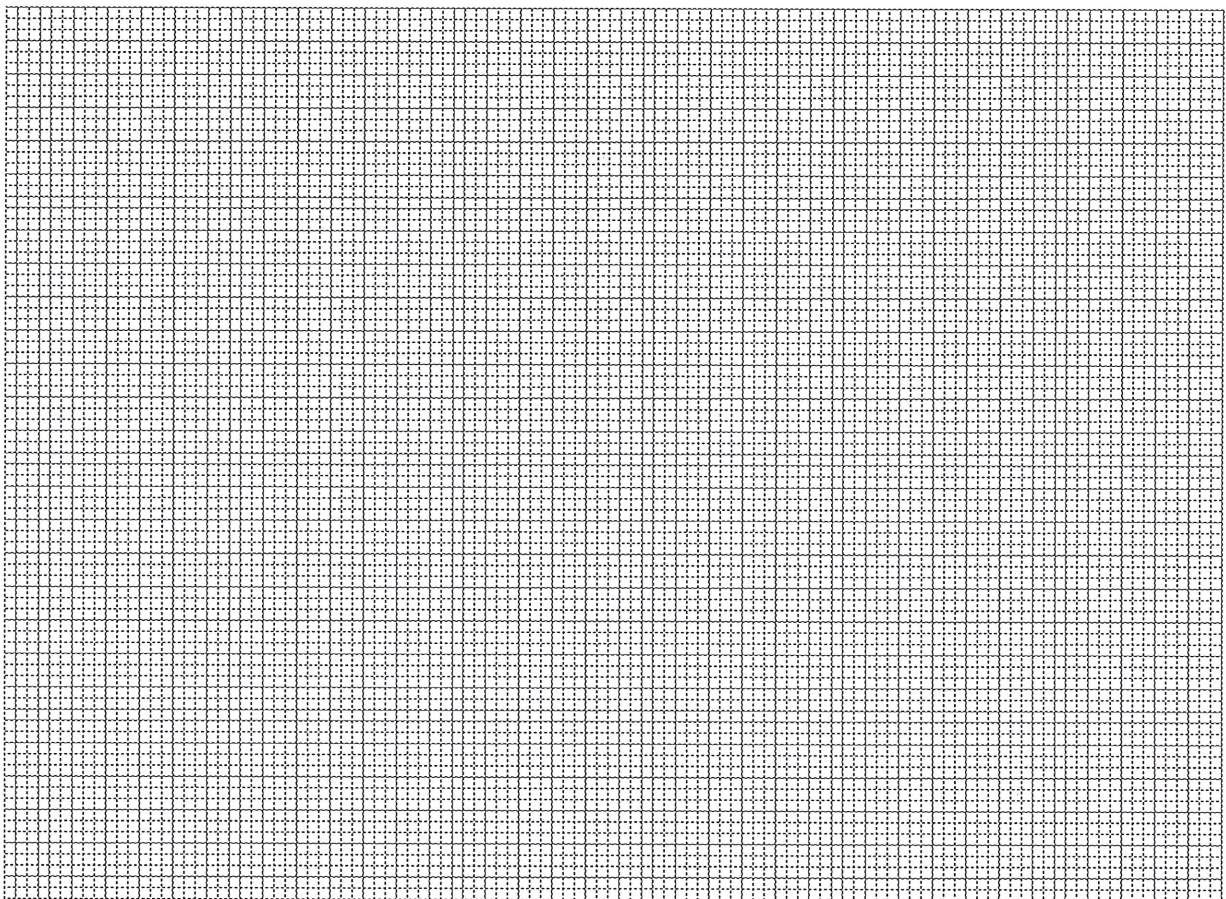
所以，當 $x=3$, $y=2.5$ 時，得到最優解。也就是說，如果小明今天買 3 件手信，遊玩 2.5 小時，就能令自己最開心。

Your turn:

- (L2) 小鵬最愛喝果汁茶，果汁茶由果汁及茶混合而成。為免果汁茶味道太淡，果汁和茶的份量比例最少為 1 : 2，1 公升果汁價錢為 8 元而 1 公升茶價錢為 5 元。小鵬身上有 45 元，小鵬應該買多少公升果汁和茶使果汁茶的份量最多呢？

(答案：果汁 2.5 公升，茶 5 公升。)

解：



(L3) 小智是寵物小精靈訓練員，要帶著他的寵物小精靈進行他的旅程。每一隻寵物小精靈都可被放進一個 200 立方厘米的精靈球(40 元)，以方便攜帶。由於旅途驚險萬分，小智決定至少攜帶 3 隻寵物小精靈及 6 個 150 立方厘米的藥包(每個 10 元)上路。可惜小智的背包只餘下 2000 立方厘米及身上只有 250 元，小智如何可善用背包餘下的空間呢？(假設小智覺得寵物小精靈比藥包重要得很多。)

(答案：小精靈 4 隻，藥包 8 個。)

解：



(L4) (多維模型)

某英超組球會為新一年球季作準備，開始組軍。球員名單當中有 18 名英國球員，8 名其他歐盟球員及 4 名非歐盟球員。其領隊每周有 50 萬英鎊作班費，而每名英國球員周薪為 30000 英鎊，其他歐盟球員周薪為 35000 英鎊，而非歐盟球員周薪為 40000 英鎊。但英超規定每隊球隊最少有 15 名、最多 25 名註冊球員，非歐盟球員不能超過 3 個，而其他歐盟球員及非歐盟球員總數不能超過 7 個。領隊認為 2 個非歐盟球員相當於 3 個英國球員重要，而 3 個其他歐盟球員相當於 4 個英國球員重要，請問該領隊應選入多少個英國球員、歐盟球員及非歐盟球員呢？

(答案：8 位英國球員，4 位歐盟球員，3 位非歐盟球員。)

解：

運輸問題

- 1) 運輸問題和分配問題都是線性規劃問題的一種，但它們均擁有特殊結構，故有其獨特求解方法。
- 2) 故此，即使不用寫出模型的規格，仍能進行優化！
- 3) 運輸問題背景：

- 有 m 間工廠， n 間店舖
- 每間工廠 i 能生產 s_i 件貨物
- 每間店舖 j 需要 d_j 件貨物
- c_{ij} 是每件貨物由工廠 i 運往店舖 j 的費用

目標：要滿足各店舖的需求，最少的運費該為多少？

- 4) (T1)

高中出版社設有 3 間印刷工場分別在柴灣(CW)、觀塘(KT)及荃灣(TW)，4 間門市在銅鑼灣(CWB)、旺角(MK)、尖沙咀(TST)及沙田(ST)。印刷工場 TW、KT、CW 分別印刷 8000、6000、5000 本數學練習，而門市 CWB, MK, TST, ST 分別要求 5000、6000、4000 及 4000 本。各印刷工場與門市距離(公里)分別如下：

工廠 \ 門市	CWB	MK	TST	ST
CW	10	14	12	16
KT	12	8	10	10
TW	14	10	12	14

運費為每公里每 100 本 \$1，求最少的運費使數學練習能運至各門市，並能滿足需求。

解：(i) 從左上方開始，先粗略分配資源，寫在每格右上方，並稱為 x_{ij} 值(劃定顏色格)

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i
1	10 5	14 3	12	16	8
2	12	8 3	10 3	10	6
3	14	10	12 1	14 4	5
d_j	5	6	4	4	

(ii) 對應各顏色格，利用 c_{ij} 來計算 u_i 和 v_j ($c_{ij} = u_i + v_j$ 及隨意定 u_1 為 0)。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	3	12	16	8	0
2	12	8	3	10	3	10	6	-6
3	14	10	12	1	14	4	5	-4
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	14	16	18				

(iii) 在非顏色格計算 r_{ij} 值 ($r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$)。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	3	12	16	8	0
			-4		-2			
2	12	8	3	10	3	10	6	-6
	8				-2			
3	14	10	12	1	14	4	5	-4
	8	0						
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	14	16	18				

(iv) 找出最負的 r_{ij} 值，以這格為起點，利用顏色格，找出一條循環路線

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	3	12	16	8	0
		-	-4 +		-2			
2	12	8	3	10	3	10	6	-6
	4	+	-		-2			
3	14	10	12	1	14	4	5	-4
	8	0						
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	14	16	18				

(v) 選取所有 x_{ij} 會減少的”轉角位”中，最少的 x_{ij} 值，並在每個”轉角位”及位點格加/減該值。如 $\min\{3, 3\}=3$

(vi) 將被選取的顏色格的顏色抹去，並為剛才的起點格上色，使兩格身份對調。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5 14		12 3 16		8	0
				-2		
2	12 4	8 6	10 0	10	6	-6
				-2		
3	14 8	10 0	12 1 14	4	5	-4
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	14	16	18		

(vii) 返回步驟(2)-(5)，直到所有非顏色格的 r_{ij} 格皆為非負值。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5 14		12 3 16		8	0
		4		2		
2	12 4	8 6	10 0	10	6	-2
				-2		
3	14 4	10 0	12 1 14	4	5	0
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	10	12	14		

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5 14		12 3 16		8	0
		4		2		
2	12 4	8 6	10 0	10	6	-2
			-	-2+		
3	14 4	10 0	12 1 14	4	5	0
			+	-		
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	10	12	14		

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	12	3	16	8	0
			2			2		
2	12	8	6	10		10	6	-4
	6	-		2		+		
3	14	10	12	1	14	4	5	0
	4	-2+				-		
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	12	12	14				

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	12	3	16	8	0
			4			4		
2	12	8	2	10		10	6	-2
	4			0				
3	14	10	4	12	1	14	5	0
	4					2		
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	10	12	12				

所以應送 CW 應運 5000 本習作到 CWB，3000 本到 TST；
 KW 應送 2000 本到 MK，4000 本到 ST；
 TW 應送 4000 本到 MK，1000 本到 TST。

(T2) 有三個牧場為四間雪糕廠供牛奶。牧場 1、2、3 每月分別能供牛奶 15、25、10 萬桶，除了雪糕廠 A 每月只需 5 桶，其他均需要 15 桶。每桶牛奶到各地的運費如下：

牧場 \ 雪糕廠	1	2	3	4
1	10	2	20	11
2	12	7	9	20
3	4	14	16	18

如何搬運牛奶，才使運輸成本減至最少？

(T3) 各工廠應分別運送多少數量至各配銷中心，才能獲致最低的總運輸成本？

配銷中心					
工廠	D1	D2	D3	D4	供給
S1	12	10	5	8	90
S2	7	4	9	6	120
S3	9	11	7	5	75
需求	65	80	90	50	

- 供給及需求單位：1卡車的量
- 單位運輸成本：千元

分配問題

- 1) 分配問題除了是線性規劃問題的一種，它亦是運輸問題的特例。
- 2) 故此，也是即使不用寫出模型的規格，仍能透過其特性進行優化！
- 3) 分配問題背景：
 - 有 n 件工作分給 n 個工人（機器）
 - 所有工作必須被分派出
 - 所有工人只能被獲分配一件工作
 - c_{ij} 是每個工人 i 做工作 j 時的產量

目標：要怎麼分配才能獲得最高產量？

4) (A1) 打字員工作安排

出版社每日有三種語文的文章要出版，三種語言分別為中文、英文及日文。
小明、小家和小仁都是這家出版社的打字員，以下為他們打字的速度：

	中文	英文	日文
小明	60/min	100/min	30/min
小家	45/min	80/min	40/min
小仁	50/min	90/min	45/min

請問出版社應安排他們負責那一種語言呢？（假設出版社希望每分鐘打的字數為最多。）

解(1)：(i) 列表：

	中文	英文	日文
小明	60	100	30
小家	45	80	40
小仁	50	90	45

(ii) 找出最大數（最大數 = 100）

(iii) 最大數減各數

	中文	英文	日文
小明	100-60=40	100-100=0	100-30=70
小家	100-45=55	100-80=20	100-40=60
小仁	100-50=50	100-90=10	100-45=55

(iv) 行數與列數相同，做步驟(v)

(v) 找出各行最小數

	中文	英文	日文	行最小數
小明	40	0	70	0
小家	55	20	60	20
小仁	50	10	55	10

(vi) 各行分別減去其行最小數

	中文	英文	日文	行最小數
小明	$40-0=40$	$0-0=0$	$70-0=70$	0
小家	$55-20=35$	$20-20=0$	$60-20=40$	20
小仁	$50-10=40$	$10-10=0$	$55-10=45$	10

(vii) 找出各列最小數

	中文	英文	日文
小明	40	0	70
小家	35	0	40
小仁	40	0	45
列最小數	35	0	40

(viii) 各列分別減去其列最小數

	中文	英文	日文
小明	$40-35=5$	0	$70-40=30$
小家	$35-35=0$	0	$40-40=0$
小仁	$40-35=5$	0	$45-40=5$
列最小數	35	0	40

(ix) 以最少的橫或直線覆蓋所有 0

	中文	英文	日文
小明	5	0	30
小家	0	0	0
小仁	5	0	5

(x) 由於最少的橫及直線為 2，少於 3。找出沒有被覆蓋的數字的最小數 $k = 5$ 。

(xi) 沒有被覆蓋的數字減去 k ，橫線和直線相交的數字加 k

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

(ix) 以最少的橫或直線覆蓋所有 0

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

最少的線數等於 3，則做步驟 12 以找出最優解

(xii) 選出三個 0，令致每一行和每一列都只有一個 0 被選出

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

答案一：

小明打中文、小家打日文、小仁打中文。

每分鐘字數為 $60+40+90=190$ 。

或

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

答案二：

小明打英文、小家打中文、小仁打日文。

每分鐘字數為 $100+45+45=190$ 。

或

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

答案三：

小明打英文、小家打日文、小仁打中文。

每分鐘字數為 $100+40+50=190$ 。

Your turn

(A2) 搬運貨物

小明打算分配物資搬運工作，所要搬運的東西包括：木材、磚、以及鋼筋，有無限的供應。他有三輛不同的貨車（甲，乙，丙），由於車身大小以及載重能力的限制，每車對每種物資的最大運載量限制如下：

	木材	磚	鋼筋
甲車	1	3	1.5
乙車	0.5	4	2
丙車	0.5	1	1

假如小明只可搬運一次，而每種物資均要搬運，請問小明該如何分配搬運工作（哪車搬運木材，哪車搬運磚，哪車搬運鋼筋），以運送最重的物資？

解：

(A3) 兩軍較量，調兵遣將

AB 兩國進行乒乓球團體對抗賽。雙方各出 5 人，進行 5 場單打對抗。每場對抗打 5 局。最終以總勝局數多的一方勝出。

A 方教練估計兩隊隊員對戰比數 (A:B) 如下：

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	3 : 2	2 : 3	3 : 2	1 : 4	4 : 1
A2	2 : 3	3 : 2	4 : 1	2 : 3	1 : 4
A3	1 : 4	3 : 2	2 : 3	3 : 2	2 : 3
A4	3 : 2	2 : 3	2 : 3	1 : 4	3 : 2
A5	3 : 2	4 : 1	5 : 0	3 : 2	1 : 4

隊員可能打法相剋，故有 A1 勝 B1, B1 勝 A2, A2 勝 B2, B2 勝 A1 發生。假如 B 方隊員出場順序預計為 B1, B2, B3, B4, B5。那麼 A 方教練應該如何排兵佈陣，以求最大的總淨勝局數？

解：先簡化上表

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	$3-2=1$	$2-3=-1$	$3-2=1$	$1-4=-3$	$4-1=3$
A2	$2-3=-1$	$3-2=1$	$4-1=3$	$2-3=-1$	$1-4=-3$
A3	$1-4=-3$	$3-2=1$	$2-3=-1$	$3-2=1$	$2-3=-1$
A4	$3-2=1$	$2-3=-1$	$2-3=-1$	$1-4=-3$	$3-2=1$
A5	$3-2=1$	$4-1=3$	$5-0=5$	$3-2=1$	$1-4=-3$